

الدورة: 2026

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) يحتوي كيس على 9 كرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس منها: كرتان تحملان الرقم 1 وأربع كرات تحمل الرقم 2 وثلاث كرات تحمل الرقم 3 . نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرات في آن واحد ونعتبر الحوادث: A : « سحب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم » ، B : « سحب ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثلى مثلى » C : « سحب ثلاث كرات مجموع أرقامها عدد زوجي »

(1) أ) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمالات الحوادث A ، B و C على الترتيب.

ب) بين أن: $P(A \cap C) = \frac{1}{21}$ ثم استنتج $P_A(C)$

(2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات، عدد الكرات التي تحمل الرقم 2

- عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$

(II) نضيف إلى محتوى الكيس السابق n كرة تحمل الرقم 1 ثم نسحب منه كرتين على التوالي دون إرجاع.

- عيّن قيمة n حتى يكون احتمال الحصول على كرتين لا تحمل أي منهما الرقم 1 يساوي $\frac{1}{5}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(iz + 4)(z^2 - 4z + 16) = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ و A ، B ، C و D نقط من المستوي

لاحقاتها على الترتيب z_A ، z_B ، z_C و z_D حيث: $z_A = 4$ ، $z_B = iz_A$ ، $z_C = 2 - 2i\sqrt{3}$ و $z_D = -iz_C$

(1) أ) اكتب كلاً من z_B ، z_C و z_D على الشكل المثلثي.

ب) علم النقاط A ، B ، C و D ثم تحقق أنها تنتمي إلى نفس الدائرة التي يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(2) أ) بذر أن: $z_D - z_B = \sqrt{3}(z_C - z_A)$ ثم استنتج أن المستقيمين (BD) و (AC) متوازيان.

ب) بين أن: $|z_B - z_A| = |z_D - z_C|$

ج) استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$ ثم عيّن لاحقة النقطة G مركز ثقله.

(3) تحقق أن: $z_D - z_A = i(z_B - z_C)$ ثم عيّن الأعداد الطبيعية n حتى يكون $\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x}{x+2}$
- (2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
- (أ) احسب u_1 و u_2 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- (ب) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 2$
- (ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- (3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n}$
- (أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يُطلب كتابة v_n بدلالة n
- (ب) عبّر عن u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)
- (4) نضع: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$
- احسب S_n بدلالة n ثم استنتج أن: $T_n = \frac{1}{2}n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) $g(x) = 2x - 2 - 4 \ln x$ بـ: $]0; +\infty[$
- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
- (2) (أ) احسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]3,5; 3,6[$
- (ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$
- (II) $f(x) = x^2 + 2x - 4x \ln x$ ، $x > 0$ ومن أجل كل $x > 0$ ، $f(0) = 0$ بـ: $[0; +\infty[$
- (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، فسّر النتيجة هندسياً واحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (2) بين أنه: من أجل كل $x > 0$ ، $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- (3) (أ) بين أن (c_f) يقبل نقطة انعطاف A ، يُطلب تعيين إحداثياتها.
- (ب) عيّن معادلة لـ (T) مماس المنحني (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2
- (4) (أ) ارسم (T) و (c_f) (نأخذ: $f(\alpha) \simeq 1,7$)
- (ب) عيّن بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = m$ ثلاثة حلول.
- (5) (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}$
- (ب) احسب $\mathcal{M}$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بـ (c_f) والمستقيمت التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = e$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس ذات الألوان الأخضر، الأحمر والأبيض. نسحب من الكيس بطريقة عشوائية كرة واحدة ونعرف قانون احتمال هذه التجربة بالجدول الآتي:

	بيضاء	حمراء	خضراء	الكرة المسحوبة
حيث $a \in \mathbb{R}$	$2a$	a	$\frac{1}{10}$	الاحتمال

- احسب قيمة a ثم استنتج عدد كل من الكرات الخضراء، الحمراء، البيضاء.

(II) نفرض أن الكيس يحتوي على كرة واحدة خضراء، 3 كرات حمراء و 6 كرات بيضاء.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس ونعتبر الحوادث:

A : « الحصول على كرة حمراء واحدة فقط » ، B : « الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون »

C : « الحصول على ثلاث كرات ليست كلها من نفس اللون »

(1) أ) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمالات الحوادث A ، B و C على الترتيب.

ب) احسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين علما أننا لا نحصل على الكرة الخضراء.

(2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات، عدد الألوان التي تحملها الكرات المسحوبة.

- بين أن: $P(X=2) = \frac{27}{40}$ وعين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(E) \dots z^2 + \alpha z + 4 = 0$ حيث α عدد حقيقي.

أ) احسب $(-1 + i\sqrt{3})^2$ ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد $-2 - 2i\sqrt{3}$

ب) عين α حتى يكون العدد المركب $-1 + i\sqrt{3}$ حلاً للمعادلة (E) ثم استنتج حلها الآخر.

(2) نعتبر الأعداد المركبة z_1 ، z_2 و z_3 حيث: $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_3 = \sqrt{2}(1 - i)$

أ) اكتب كلا من z_1 ، z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.

ب) استنتج الشكل المثلثي للعدد المركب L حيث: $L = \frac{z_1 \times z_3}{z_2}$

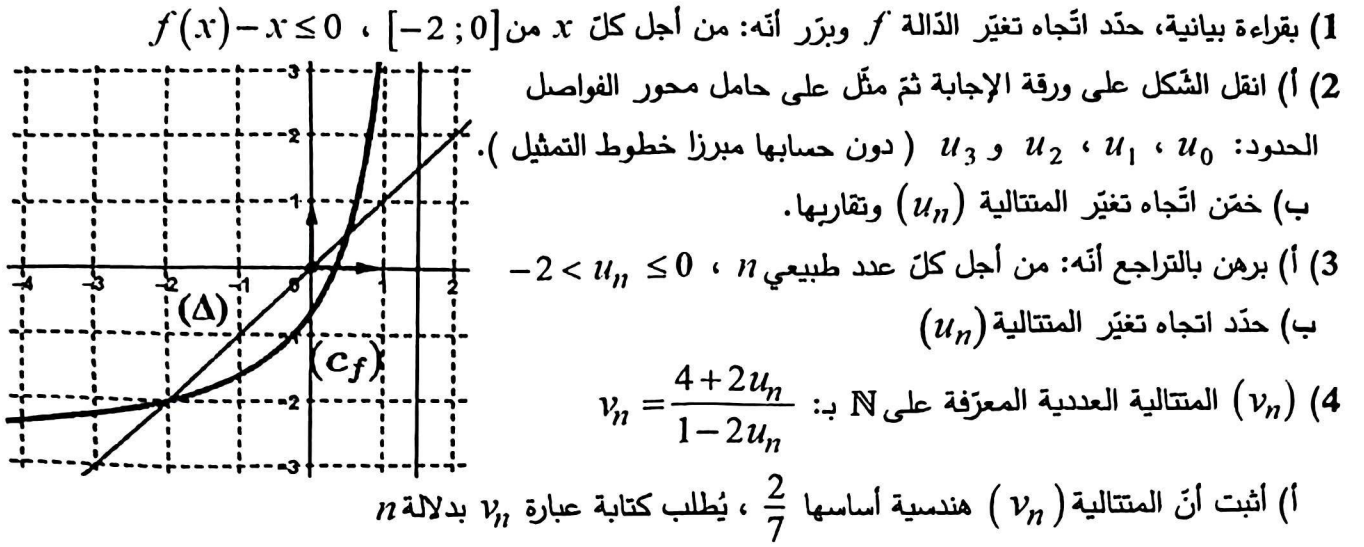
ج) اكتب L على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{13\pi}{12}$ و $\sin \frac{13\pi}{12}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

f الدالة المعرفة على $]-\infty; \frac{3}{2}[$ ب: $f(x) = \frac{-6x+2}{2x-3}$ و (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$



التمرين الرابع: (07 نقاط)
 f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{5-4e^x}{e^{2x}-1}$ و (c_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثمّ فمّر النتائج هندسياً.

(2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \frac{2e^x(e^x-2)(2e^x-1)}{(e^{2x}-1)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(3) بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $\mathbb{R}^*$ ، $f(-x) + f(x) = -3$ ، وفمّر النتيجة هندسياً ثمّ ارسم المنحني (c_f)

(4) أ) تحقّق أنّه: من أجل كلّ x من $\mathbb{R}^*$ ، $f(x) = -4 + \frac{1}{2} \left(\frac{9e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1-e^x} \right)$

(ب) احسب بدلالة λ المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدّد بـ (c_f) والمستقيمتين التي معادلاتها:

$y = -4$ ، $x = \lambda$ و $x = -\ln 2$ حيث: $\lambda < -\ln 2$ ثمّ احسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

(5) g الدالة المعرّفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = f(\ln x)$

- تحقّق أنّه: من أجل كلّ $x > 1$ ، $g(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$ وحدّد اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

انتهى الموضوع الثاني